Esercizi di Algebra Lineare 1

Esercizio 1. Risolvere il seguente sistema di equazioni a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$, utilizzando la matrice associata e il metodo di Gauss:

$$\begin{cases} a+c+d & =0 \\ a+b+c+e+f & =1 \\ a+e+f & =0 \\ a+c+e & =1 \\ d+f & =1 \\ b+e+f & =0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Risolvere il seguente sistema di equazioni a coefficienti in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+2z & = & -1 \\ 3x+y-z & = & 0 \\ x+4y+3z & = & 1 \\ 2x-y & = & 1 \end{cases}$$

Esercizio 3. Discutere, al variare del parametro reale k, la risolubilità in $\mathbb{R}^4$ del sistema:

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t & = & 1 \\ 2x+y+5t & = & k \\ 3x+z-t & = & (k-1) \\ x-y-3z+t & = & 1 \end{cases}$$

Esercizio 4. Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera, e in tal caso dimostrarla, o se è falsa, e in tal caso darne un controesempio.

a) $W=\{p(x)\in\mathbb{R}[x]_{\leq 7} \mid p(1)p(2)=0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]_{\leq 7}$.

b) $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+2z=0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

c) $X=\{A=\{a_{ij}\}\in M_{3,3}(K) \mid a_{11}+a_{22}+a_{33}=0\}$ è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(K)$ (K è un campo qualsiasi).

d) $Y=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad-bc=0\right\}$ è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(K)$.

e) $Z=\{p(x)\mathbb{C}[x] \mid x-1|p(x)\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}[x]$.

Esercizio 5. Sia $V=\{f(x)\in\mathbb{Q}[x]_{\leq 4} \parallel f'(x)=0, f(1)=f(-1)=0\}$.
Dimostrare che V è uno spazio vettoriale di $\mathbb{Q}[x]$ e determinarne una base.

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $\{v_1,v_2,v_3\}$ una sua base. È vero che anche $\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_1+v_3\}$ è una base di V?